20/11/17

Παράδειγμα: Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και τη μερική διαφορισιμότητα την

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση

Για $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$ αντίστοιχα για $\frac{df(x,y)}{dy}$ ⇒

⇒ Για $(x,y) \neq (0,0)$ η f είναι μερικώς διαφορίσιμη

Επίσης παρατηρώ ότι η f είναι ~~διαφορίσιμη~~ συνεχής

Για $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{df(\overset{x_0}{0},\overset{y_0}{0})}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overset{x_0}{0}+h,\overset{y_0}{0}) - f(\overset{x_0}{0},\overset{y_0}{0})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

αντίστοιχα $\frac{df(0,0)}{dy} = 0$

(Προσοχή!!! Όταν γράφαμε $\lim_{h \to 0}$ by the book book εννοούμε ότι $h \neq 0$)

Άρα η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$ (έχει παραγώγους δηλ.)
όμως η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$!!!
αφού π.χ ~~$f(1,n)=1$~~ $f\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right) = \frac{\frac{1}{\nu^2}}{\cdots} = 1$ δεν συγκλίνει

Άρα μερικώς διαφορίσιμη $\boxed{\text{δεν συνεπάγεται}}$ συνεχής

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ Εξετάστε ως προς μερ. διαφορ. και συνέχεια την $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{Λύση:}}$

Αφού $\big|\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|\big| \le \|\bar{x}-\bar{y}\|$ (γιατί;)

έχουμε $\big|\underbrace{\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}_0\|}_{\to 0}\big| \le \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\to 0}$ $\Leftarrow$

δηλ $\forall \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

δηλ f σ/ς

Επίσης η f είναι μερικώς διαφ. $\forall \bar{x} \neq 0$ αφού

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$$

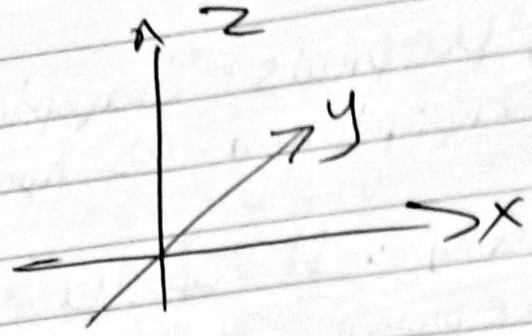
$$= \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\|\bar{x}\|} = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|} \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$$

Για $\bar{x} = \bar{0}$ έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{0}) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(h\bar{e}_i)}^{=\|h\bar{e}_i\| = |h|} - f(\bar{0})}{h}$

όπου $\bar{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
i θέση

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{0}) \nexists \Rightarrow$ άρα η f δεν είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{0}$.

Σημείωση για $n=2$ $f(x,y) = \|(x,y)\|$

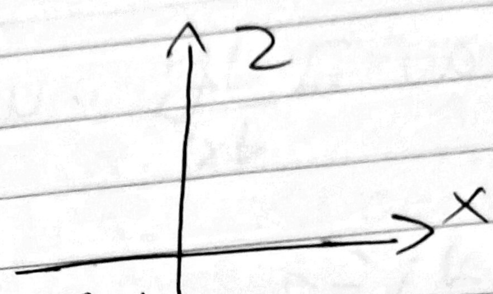


$f(x,y)=\|(x,y)\|$

$=\sqrt{x^2+y^2}$

$y=0$ $=\sqrt{x^2}=|x|$

$\boxed{y=0}$



$f(x,0)=$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2}=|x|$

Για την $(x,y)=\|(x,y)\|$

Αντιστοιχεί στο $g(r)=r$ αν $r=\|(x,y)\|$

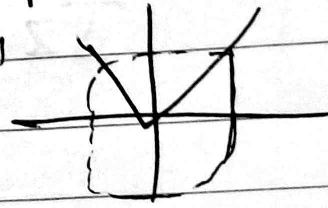
δηλ το $z=\|(x,y)\|$ αυξάνει γραμμικά

με το $r=\|(x,y)\|\geq 0$

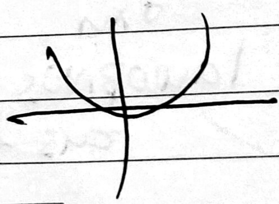
Επίσης για $\|(x,y)\|=r$ όλα τα σημεία πάνω στον

κύκλο $x^2+y^2=r^2$ έχουν την ίδια τιμή

$f(x,y)=r$ άρα κώνος το σχήμα



Ενώ $f(x,y)=\|(x,y)\|^2$



Ορισμός Η $\bar{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots \\ f_m\end{pmatrix}: U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό,

$\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in U$ ($\Rightarrow \bar{x}$ σ.σ του U)

ονομάζεται μερικώς διαφορίσιμη ως προς την

i μεταβλητή στο $\bar{x}$, αν όλες οι συνιστώσες

συναρτήσεις $f_j: U\to\mathbb{R}$ $j=1,\dots,m$, έχουν

αυτή την ιδιότητα, δηλ $\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) \overset{op}{=}$

$\left(=\lim_{h\to 0}\frac{f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f_j(\bar{x})}{h}\right)\in\mathbb{R}$

ρυθμός αλλαγής μεταβολής το ... ως προς x_i

Αντίστοιχα, μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, μερικώς διαφορίσιμη ως προς i, μερ. διαφορίσιμη.

Παρατήρηση: Η $f: U \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη,

αν $\exists \frac{df_j}{dx_i}: U \to \mathbb{R}$ $\forall j = 1, \dots, m$

$\forall i = 1, \dots, n$ και είναι (συνεχείς οι μερ.παρ σ(s)).

Ορισμός: Έστω $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_m \end{pmatrix}: U \to \mathbb{R}^m$ μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$. Τότε ο πίνακας:

$$J_f(\bar{x}) \overset{\text{δεν}}{=} \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(\bar{x}) \\ \frac{df_m}{dx_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{df_m}{dx_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Ιακωβινός πίνακας της f στο $\bar{x}$

$\boxed{\text{Super Βασικό}}$

Κάθε ΓΡΑΜΜΗ αντιστοιχεί σε μια ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ f_j, $j = 1, \dots, m$

Παρατήρηση: $J_f(\bar{x}) \overset{\text{τδεν}}{=} \begin{pmatrix} \text{grad} \\ \\ \end{pmatrix}$

(ισχύει) $\text{grad} f_i(\bar{x}) = \left(\frac{df_i}{dx_1}(\bar{x}), \dots, \frac{df_i(\bar{x})}{d(x_n)} \right) =$

$= \nabla f_i(\bar{x}) = \left(\frac{df_j}{dx_1}(\bar{x}), \dots, \frac{df_i}{dx_n}(\bar{x}) \right)$

Ειδικότερα για $m=1$ (με $\bar{f}=f$) και αν

$Jf(\bar{x}) = \text{grad}\, f(x) = \left(\frac{df}{dx_1}(x), \ldots\right.$,

$m=n=1$ (με $\bar{x}=x$) $Jf(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$

Πρόταση (Άλγεβρα Ιακωβιανών πινάκων).

Έστω $\bar{f}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$ $: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $\bar{x} \in U$.

μερικώς διαφορίσιμες στο $\bar{x}$. Τότε είναι μερικώς διαφορ και οι $\bar{f}+\bar{g}$, $a\bar{f}$, $\bar{f}\cdot\bar{g}$, $\varphi\bar{f}$, όπου $\varphi: U \to \mathbb{R}$ μερ. διαφορ στο $\bar{x}$ με $J\bar{f}+\bar{g}(\bar{x}) = J\bar{f}(\bar{x}) + J\bar{g}(\bar{x}) =$

$= Ja\bar{f}(\bar{x}) = aJ\bar{f}(x)$ $\quad J\varphi\bar{f}(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})J\bar{f}(x) +$

$+ \bar{f}(x)J\varphi(\bar{x})$.

$J\bar{f}\cdot\bar{g}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})^T Jg(\bar{x}) + \bar{g}(x)^T J\bar{f}(x)$

$$(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{f_j(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}}\, \underbrace{g_j(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}} = \bar{f}(\bar{x})\cdot\bar{g}(\bar{x})$$

$\in U \subset \mathbb{R}^n$

$\in \mathbb{R}$

$\in \mathbb{R}$

Άρα $J\bar{f}\cdot\bar{g}(\bar{x}) = \nabla(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) = \text{grad}(\bar{f}\cdot\bar{g}(\bar{x}))$

$$= \left(\frac{d(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})}{dx_1}, \ldots, \frac{d(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})}{dx_n}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{d}{dx_1}(f_j g_j)(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{df_j}{dx_1}(\bar{x})\, g_j(\bar{x}) + f_j(\bar{x})\frac{dg_j}{dx_1}(\bar{x})\right)$$

$$\Rightarrow \nabla(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) \Rightarrow \sum_{j=1}^{m}\left(f_j(\bar{x})\nabla g_j(\bar{x}) + g_j(\bar{x})\nabla f_j(\bar{x})\right) = (f_1(\bar{x}),\dots,f_n(\bar{x}))\, J\bar{g}(\bar{x}) + (g_1(\bar{x}),\dots,g_m(\bar{x}))\, J\bar{f}(\bar{x}).$$